MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE (DGESE)

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

Concours GE2I session 2015

Composition : Physique 4 (mécanique, optique)

Durée : 3 Heures

Les calculatrices sont autorisées.

N.B : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte deux parties : MECANIQUE. et OPTIQUE

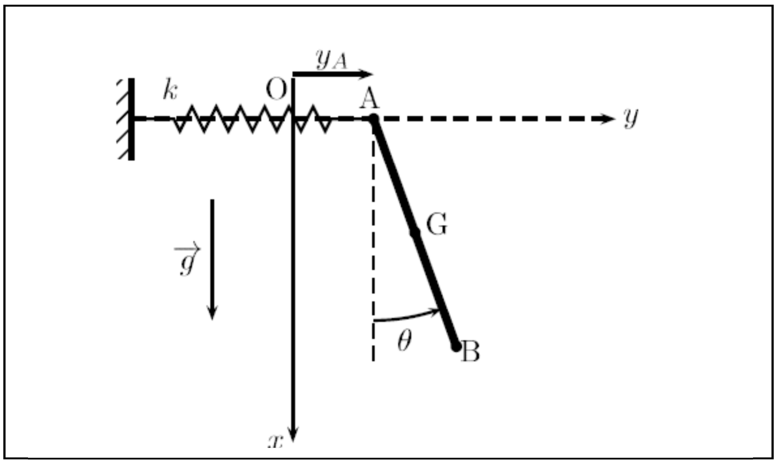
PARTIE 1 : MECANIQUE

On considère le système mécanique représenté ci-après. AB es une barre homogène de masse m et de longueur $2l$. L'extrémité A de la barre est assujettie à se déplacer, sans frottement, le long de l'axe matérialisé par Oy. On note G le centre d'inertie de la barre repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y). L'orientation de la barre dans le plan xOy est repérée par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale. Le champ de pesanteur est uniforme et donné par : $\vec{g} = g\vec{u}_x$.

En plus de son poids, la barre est soumise à l'action d'une force de rappel appliquée au point A et schématisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Au passage de l'extrémité A de la barre par l'origine O ($y_A = 0$), la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide l_0.

On s'intéresse aux mouvements d'oscillation de la barre AB dans le plan xOy. Toute l'étude sera menée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

On donne le moment d'inertie J de la barre AB par rapport à un axe Δ perpendiculaire à la barre et passant par son centre d'inertie G : $J = \frac{ml^2}{3}$



I. Mise en équation.

I.1

I.1.1. Exprimer x en fonction de l et θ.

I.1.2 exprimer de même la coordonnée yA donnant la position de l'extrémité A de la barre, $y_A = \overrightarrow{OA}.\vec{u}_y$ en fonction de y, l et θ.

I.2 On se propose de déterminer les équations du mouvement de la barre.

I.2.1 faire le bilan des efforts exercés sur la barre en mouvement et représenter schématiquement leur résultante sur une figure.

I.2.2 Ecrire le théorème de la résultante cinétique appliqué à la barre AB.

I.2.3 En déduire l'expression de la résultante $\vec{R}$ de l'axe Oy en fonction de m, g, l et θ et de ses dérivées ainsi qu'une équation du mouvement reliant $y, \ddot{y}\ et\ \theta$. On posera : $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

I.2.4 Donner l'expression du moment cinétique en G et écrire le théorème du moment cinétique en G. on spécifiera les différentes expressions des moments des forces.

I.2.5 En déduire à l'aide d'une projection convenable, que $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\ et\ y$ peuvent être reliés par une équation de la forme :

$$(1 + 3sin^2\theta)\ddot{\theta} = \frac{3}{l} y\omega_1^2 \cos\theta - \omega_2^2 \sin\theta - 3(\omega_1^2 + \dot{\theta}^2)\sin\theta\cos\theta$$

$on\ posera\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$.

II. Etude des petites oscillations de la barre.

On s'intéresse aux petits mouvements de la barre AB. Dans ce cas y et θ ainsi que toutes leurs dérivées temporelles sont supposées être des infiniment petits du premier ordre.

II.1 En linéarisant les équations du mouvement obtenues précédemment, montrer que, dans ce cas, le mouvement général de la barre est décrit

par : $\left\{\begin{matrix} \ddot{y} + \omega_1^2 y = \omega_1^2 x \\ \ddot{x} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2)x = 3\omega_1^2 y \end{matrix}\right\}$ $où\ l'on\ a\ posé\ x = l\theta$.

II.2 On cherche les modes propres d'oscillations de la barre sous la forme, en notation complexe : $\left\{\begin{matrix} \underline{y} = \underline{A}exp(i\Omega t) \\ \underline{x} = \underline{B}\exp(i\Omega t) \end{matrix}\right\}$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$. $\underline{A}\ et\ \underline{B}$ sont deux constantes complexes.

II.2.1 Montrer que $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont solutions du système linéaire homogène suivant :

$$\left\{\begin{matrix} (\omega_1^2 - \Omega^2)\underline{A} - \omega_1^2\underline{B} = 0 \\ -3\omega_1^2\underline{A} + (3\omega_1^2 + \omega_1^2 - \Omega^2)\underline{B} = 0 \end{matrix}\right\}$$

II.2.2 A quelle condition ce système admet-il des solutions non identiquement nulles ?

II.2.3 En déduire que Ω est solution de l'équation : $\Omega^4 - (4\omega_1^2 + \omega_2^2)\Omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0$.

II.2.4 Montrer alors que, dans le cadre des petites oscillations, le mouvement libre le plus général est donné par $\left\{\begin{matrix} \underline{y} = \underline{A}_1 exp(i\Omega_1 t) + \underline{A}_2 exp(i\Omega_2 t) \\ \underline{z} = \underline{B}_1 \exp(i\Omega_2 t) + \underline{B}_2 exp(i\Omega_2 t) \end{matrix}\right\}$ et donner les expressions de Ω_1 et Ω_2 en fonction de $\omega_1\ et\ \omega_2$. On prendra $\Omega_1 > \Omega_2$. Comment détermine-t-on $\underline{A_1}, \underline{A}_2, \underline{B}_1\ et\ \underline{B}_2$?

II.3 Initialement (t=0), l'extrémité A étant au repos, on écarte la barre AB d'un angle $\theta_0 > 0$ très faible par rapport à la verticale et on la lâche sans vitesse initiale.

II.3.1 Déterminer les constantes $\underline{A_1}, \underline{A}_2, \underline{B}_1\ et\ \underline{B}_2$.

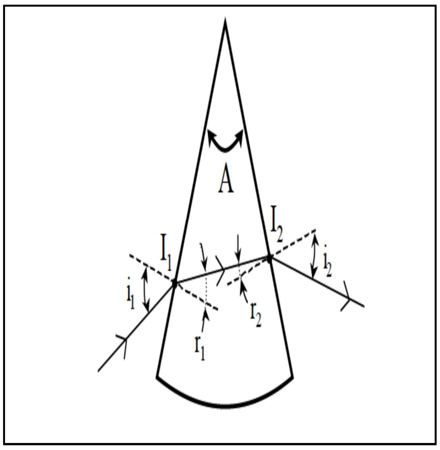
II.3.2 Que vaut y(t) ?x(t) ?

II.3.3 En déduire l'expression de $\theta(t) en\ fonction\ de\ \Omega_1, \Omega_2, \theta_0\ et\ t$.

PARTIE 2 OPTIQUE

On considère un rayon lumineux incident situé dans un milieu 1 d'indice de réfraction n_1, venant frapper un dioptre plan qui le sépare du milieu 2 d'indice de réfraction n_2.

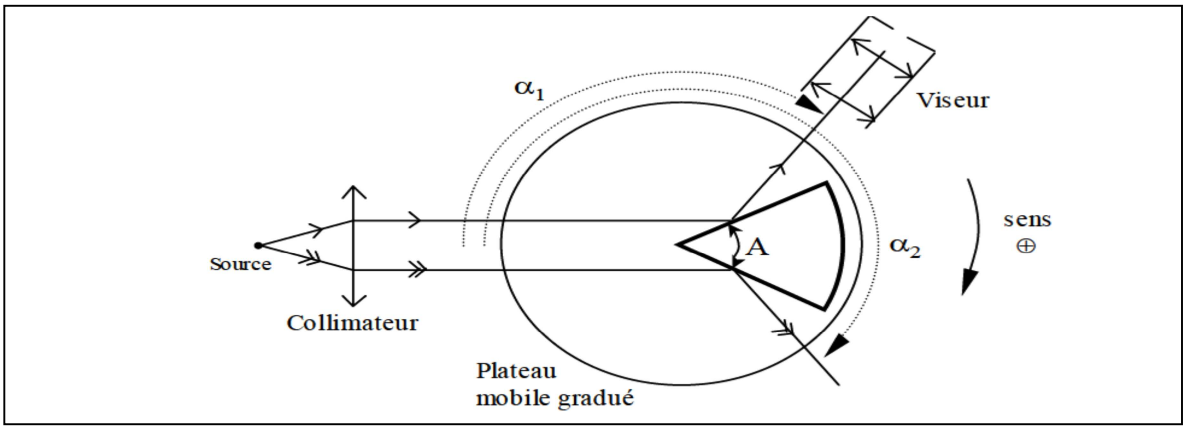
1. Lois de Snell-Descartes
   1.1 Enoncer les lois de la réflexion, accompagnées d'un schéma.
   1.2 Enoncer les lois de la réfraction, accompagnées d'un schéma.
   1.3 Expliquer les phénomènes de réflexion totale et d'angle limite.
2. Réfraction dans un prisme-mesure de l'indice d'un verre
   On considère un prisme d'angle A, transparent, homogène et isotrope d'indice n, plongé dans l'air d'indice 1 (voir figure). Les angles apparaissent sur la figure 1 et correspondent aux conventions traditionnelles.



   2.1 Montrer qu'un rayon incident pénètre forcement dans le prisme.
   2.2 Ecrire les mois de Descartes en $I_1\ et\ I_2$
   2.3 Montrer la relation entre les angles $r_1\ et\ r_2$
   2.4 Définir l'angle de déviation, noté D, et l'exprimer en fonction des angles $A, i_1\ et\ i_2$.
   2.5 On constate expérimentalement que l'angle D prend une valeur minimum D_m lorsque l'on fait varier l'angle d'incidence i_1.
   Montrer que lorsque $D = D_m$ alors $i_1 = i_2 = i_m$ et $r_1 = r_2$.
   Démontrer que l'indice n est donné par la relation :

$$n = \frac{\sin(\frac{D_m + A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}$$

3. Application à la mesure de l'indice du verre.
   La technique du minimum de déviation permet de mesurer expérimentalement l'indice du verre d'un prisme. Cette mesure est effectuée à l'aide d'un goniomètre constitué d'un plateau mobile gradué en degrés et en minutes, sur lequel est placé le prisme. Un collimateur, constitué d'une source lumineuse ponctuelle monochromatique, placée au foyer d'une lentille convergente, permet d'envoyer sur le prisme un faisceau de rayons lumineux parallèles. Une lunette de visée, réglée à l'infini et placée sur un bras mobile, permet l'observation de faisceaux émergent ou réfléchi.

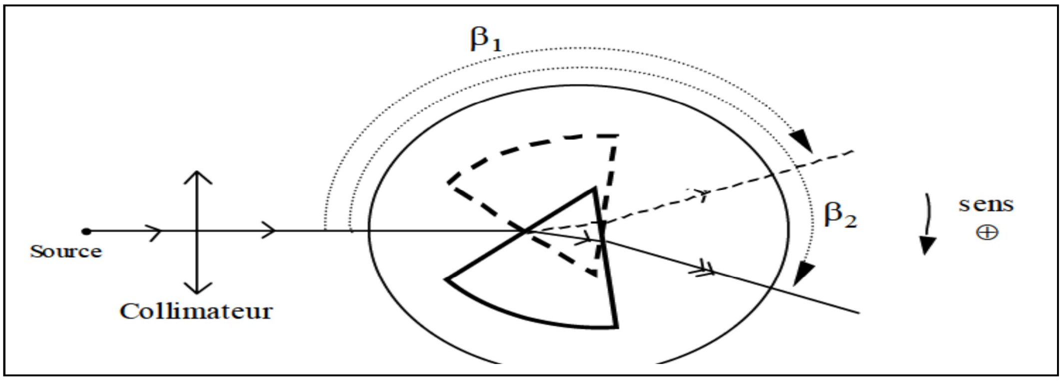


3.1 Le prisme est placé vis-à-vis du collimateur de façon à ce que ses deux faces reçoivent à peu prés autant de lumière. Avec le viseur on relève les angles $\alpha_1\ et\ \alpha_2$ des faisceaux réfléchis par les deux faces. Exprimer A en fonction de $\alpha_1\ et\ \alpha_2$

Application numérique : $\alpha_1 = 119°58'et\ \alpha_2 = 240°04'$ Calculer A

3.2 On dispose l'ensemble plateau-prisme de façon à observer le minimum de déviation ; on relève alors l'angle β_1 indiqué sur la figure suivante.

On recommence la même opération en faisant entrer le faisceau incident par l'autre face du prisme : on relève alors l'angle β_2



Exprimer $D_m\ en\ fonction\ de\ \beta_1\ et\ \beta_2.$

Application numérique : $\beta_1 = 218°42'et\ \beta_2 = 141°16'$. Calculer D_m.

3.3 En déduire l'indice n du verre utilisé pour fabriquer le prisme.

3.4 On considère que l'erreur de mesure est identique pour les angles A et D_m et telle que $\Delta A = \Delta D_m = 2'$. en déduire l'incertitude absolue Δn sur la mesure de n.

On rappelle qu'un angle de 1° équivaut à 60'